МЕХАНИКА
MECHANICS







УДК 539.3

Научная статья

https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-2-81-90



Связанная динамическая осесимметричная задача термоэлектроупругости для длинного полого пьезокерамического цилиндра

Д. А. Шляхин✉, **М. А. Кальмова**

Самарский государственный технический университет, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194

✉ d-612-mit2009@yandex.ru

Аннотация

Введение. Статья посвящена проблеме исследования связанных нестационарных термоэлектроупругих полей в пьезокерамических конструкциях. Кратко излагаются основные подходы, связанные с построением общего решения при исследовании исходных несамосопряженных уравнений, описывающих рассматриваемый процесс. Целью работы является построение нового замкнутого решения осесимметричной задачи термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра.

Материалы и методы. Рассматривается длинный полый цилиндр, электродированные поверхности которого подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением. На цилиндрических поверхностях пластины задана температура, изменяющаяся по времени. Используется гиперболическая теория термоэлектроупругости Лорда–Шульмана. Замкнутое решение построено с помощью обобщенного метода конечных интегральных преобразований.

Результаты исследования. Разработанный алгоритм расчета позволяет определить напряженно–деформированное состояние цилиндра, его температурное и электрическое поля. Кроме того, появляется возможность исследовать связанность полей в пьезокерамическом цилиндре, а также проанализировать влияние релаксации теплового потока на рассматриваемые поля.

Обсуждение и заключения. Использование допущений о равенстве компонент тензора температурных напряжений и отсутствие влияния температуры на электрическое поле позволяет сформулировать самосопряженную исходную систему уравнений и построить замкнутое решение.

Ключевые слова: термоэлектроупругость, гиперболическая теория, нестационарная связанная задача, длинный пьезокерамический цилиндр, конечные интегральные преобразования.

Благодарности: авторы выражают благодарность редакции за внимательное отношение к статье и указанные замечания, которые позволили повысить ее качество.

Для цитирования: Шляхин, Д. А. Связанная динамическая осесимметричная задача термоэлектроупругости для длинного полого пьезокерамического цилиндра / Д. А. Шляхин, М. А. Кальмова // Advanced Engineering Research. — 2022. — Т. 22, № 2. — С. 81–90. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-2-81-90

Original article

Related dynamic axisymmetric thermoelectroelasticity problem for a long hollow piezoceramic cylinder

Dmitriy A. Shlyakhin ✉, **Mariya A. Kalmova**

Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya St., Samara, Russian Federation

✉ d-612-mit2009@yandex.ru

Abstract

Introduction. The article studies the problem of investigation of coupled nonstationary thermoelectroelastic fields in piezoceramic structures. The main approaches related to the construction of a general solution to the initial non-self-adjoint equations describing the process under consideration are briefly outlined. The work aims at constructing a new closed solution to the axisymmetric thermoelectroelasticity problem for a long piezoceramic cylinder.

Materials and Methods. A long hollow cylinder whose electrodated surfaces were connected to a measuring device with large input resistance was considered. On the cylindrical surfaces of the plate, a time-varying temperature was given. The hyperbolic theory of Lord–Shulman thermo-electro-elasticity was used. The closed solution is constructed using a generalized method of finite integral transformations.

Results. The developed calculation algorithm makes it possible to determine the stress–strain state of the cylinder, its temperature, and electric fields. In addition, it becomes possible to investigate the coupling of fields in a piezoceramic cylinder, as well as to analyze the effect of relaxation of the heat flow on the fields under consideration.

Discussion and Conclusion. The use of assumptions about the equality of the components of the temperature stress tensor and the absence of temperature effect on the electric field allowed us to formulate a self-adjoint initial system of equations and construct a closed solution.

Keywords: thermoelectroelasticity, hyperbolic theory, nonstationary coupled problem, long piezoceramic cylinder, finite integral transformations.

Funding information: the authors express their gratitude to the editors for their attentive attitude to the article and the comments, which made it possible to improve its quality.

For citation: D. A. Shlyakhin, M. A. Kalmova. Coupled dynamic axisymmetric thermoelectroelasticity problem for a long hollow piezoceramic cylinder. Advanced Engineering Research, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 81–90. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-2-81-90

Введение. В последнее время широкое распространение получили технические устройства различного назначения, изготовленные из пьезокерамического материала. Здесь особое место занимают приборы, работа которых основана на эффекте связанности упругих, электрических и температурных полей [1]. Для описания их работы с учетом связанности полей в настоящее время разработаны различные теории термоэлектроупругости [2–4]. При этом для более качественного описания и оценки нестационарных процессов в конструкциях возникает необходимость построения аналитических решений. Однако математическая формулировка рассматриваемых задач включает систему несамосопряженных дифференциальных уравнений в частных производных, интегрирование которых связано с большими математическими трудностями.

Для решения данной проблемы, как правило, исследуют уравнения в несвязанном виде [5, 6], анализируются бесконечно длинные тела [7–11] или рассматриваются задачи термоэлектроупругости в квазистатической постановке [12, 13].

В настоящей работе рассматривается связанная динамическая задача термоэлектроупругости для бесконечно длинного полого пьезокерамического цилиндра. В результате преобразования исходных расчетных соотношенийудается сформировать самосопряженную систему уравнений, интегрирование которой осуществляется методом неполного разделения переменных в виде обобщенного конечного интегрального преобразования [13].

Материалы и методы. Пусть полый, длинный, незакрепленный в радиальной плоскости, пьезокерамический цилиндр занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z) область Ω: $\{a \le r_* \le b, 0 \le \theta \le 2\pi, -\infty < z < \infty\}$. На цилиндрических поверхностях задана температура в виде следующих нестационарных функций (граничные условия 1-рода) — $\omega_1^*(t_*)$ $(r_* = a)$, $\omega_2^*(t_*)$ $(r_* = b)$. Внутренняя электродированная поверхность заземлена, а внешняя подключена к измерительному прибору с большим входным сопротивлением (режим электрического холостого хода).

Математическая формулировка рассматриваемой осесимметричной задачи в безразмерной форме включает дифференциальные уравнения движения, электростатики и теплового баланса на основании гиперболической теории Лорда–Шульмана, а также краевые условия [2, 7, 15]:

$$\nabla\frac{\partial U}{\partial r} - a_1\frac{U}{r^2} + \nabla\frac{\partial \phi}{\partial r} - a_2\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} - \nabla\Theta + a_3\frac{\Theta}{r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0\,, \tag{1}$$

$$-\nabla\frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4\nabla\frac{\partial U}{\partial r} + a_5\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + a_6\nabla\Theta = 0\,,$$

$$\nabla\frac{\partial \Theta}{\partial r} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(a_7\Theta + a_8\nabla U\right) = 0\,;$$

$$r = R{,}1\ \frac{\partial U}{\partial r} + a_9\frac{U}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Theta = 0\ ,\ \Theta_{|r=R} = \omega_1\,,\ \Theta_{|r=1} = \omega_2\,, \tag{2}$$

$$\phi_{|r=R}=0\ ,\left(-\frac{\partial\phi}{\partial r}+a_4\frac{\partial U}{\partial r}+a_5\frac{U}{r}+a_6\Theta\right)_{|r=1}=0\ ;$$

$$t=0\ U=\Theta=0\ ,\frac{\partial U}{\partial t}=0\ ,\frac{\partial\Theta}{\partial t}=\dot{\Theta}_0\,; \qquad (3)$$

где $\{U,r,R\}=\{U^*,r_*,a\}/b$, $\phi=\frac{e_{33}}{C_{33}b}\phi^*$, $\{\Theta,\omega_1,\omega_2\}=\frac{\gamma_{33}}{C_{33}}\{\Theta^*,\omega_1^*-T_0,\omega_2^*-T_0\}$, $\{t,\beta\}=\frac{\{t_*,\beta_{rel}\}}{b}\sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}$, $a_1=\frac{C_{11}}{C_{33}}$,

$a_2=\frac{e_{31}}{e_{33}}$, $a_3=\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}}$, $a_4=\frac{e_{33}^2}{C_{33}\varepsilon_{33}}$, $a_5=\frac{e_{31}e_{33}}{C_{33}\varepsilon_{33}}$, $a_6=\frac{g_3e_{33}}{\varepsilon_{33}\gamma_{33}}$, $a_7=k\frac{b}{\Lambda}\sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}$, $a_8=\frac{b\gamma_{33}^2T_0}{\Lambda\sqrt{C_{33}\rho}}$, $a_9=\frac{C_{13}}{C_{33}}$

$U^*(r_*,t_*),\phi^*(r_*,t_*),\Theta^*(r_*,t_*)$ — соответственно радиальная составляющая вектора перемещений, потенциал электрического поля и приращение температуры в размерной форме ($\Theta^*(r_*,t_*)=T(r_*,t_*)-T_0(r_*)$ — текущая температура и температура первоначального состояния тела); $C_{ms},\rho,e_{ms},\varepsilon_{33}$ — модули упругости, плотность, пьезомодули и коэффициент диэлектрической проницаемости электроупругого анизотропного материала $\left(m,s=\overline{1,3}\right)$; γ_{11},γ_{33} — компоненты тензора температурных напряжений ($\gamma_{11}=C_{11}\alpha_t$, $\gamma_{33}=C_{33}\alpha_t$); Λ, k, α_t — коэффициенты теплопроводности, объемной теплоемкости и линейного температурного расширения материала; g_3 — компонента тензора пирокоэффициентов; β_{rel} — время релаксации; $\dot{\Theta}_0$ — известная в начальный момент скорость изменения температуры; $\nabla=\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}$.

В случае заземления внутренней поверхности пьезокерамического элемента, электрическое напряжение $V(t_*)$ определяется потенциалом на его внешней поверхности:

$$V(t_*)=\phi(1,t_*)\,. \qquad (4)$$

При построении общего решения на первом этапе исследования в результате интегрирования уравнения электростатики определяется радиальная компонента вектора напряженности электрического поля:

$$E_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}=a_4\frac{\partial U}{\partial r}+a_5\frac{U}{r}+a_6\Theta+\frac{D_1}{r}\,, \qquad (5)$$

где D_1 — постоянная интегрирования.

Подстановка (5) в (1)–(3) позволяет сформулировать новую задачу относительно функций $U(r,t),\Theta(r,t)$. При этом условие отсутствия радиальной составляющей вектора индукции электрического поля на внешней цилиндрической поверхности элемента (последнее равенство (2) выполняется в случае $D_1=0$, а условие заземления внутренней поверхности ($\phi_{|r=R}=0$) удовлетворяется в результате интегрирования (5).

На следующем этапе решения неоднородные краевые условия (2) приводятся к виду, позволяющему в дальнейшем использовать процедуру неполного разделения переменных методом конечных интегральных преобразований. Для этого вводятся новые функции $u(r,t)$, $N(r,t)$ связанные с $U(r,t)$, $\Theta(r,t)$:

$$U(r,t)=H_1(r,t)+u(r,t)\,,\Theta(r,t)=H_2(r,t)+N(r,t)\,, \qquad (6)$$

где $H_1(r,t)=f_1(r)A(1,t)+f_2(r)A(R,t)+f_3(r)\omega_1(t)+f_4(r)\omega_2(t)$,

$$H_2(r,t)=f_5(r)\omega_1(t)+f_6(r)\omega_2(t),$$

$f_1(r)...f_6(r)$ — дважды дифференцируемые функции, $A(r,t)_{r=R,1}=(1+a_4-a_5-a_9)U(r,t)/r$.

Подстановка (6) в расчетные соотношения (1)–(3) относительно функций $U(r,t),\Theta(r,t)$ при выполнении условий:

$$(1+a_4)\nabla H_1+(a_6-1)H_2=A(r,t)_{r=R,1}\,,H_{2|r=R}=\omega_1\,,H_{2|r=1}=\omega_2\,, \qquad (7)$$

позволяет получить новую краевую задачу относительно функции $u(r,t)$, $N(r,t)$:

$$\nabla\frac{\partial u}{\partial r}-b_1\frac{u}{r^2}+b_2\frac{\partial N}{\partial r}+b_3\frac{N}{r}-\frac{1}{(1+a_4)}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=F_1\,, \qquad (8)$$

$$\nabla\frac{\partial N}{\partial r}-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(a_7N+a_8\nabla u)=F_2\,;$$

$$r=R,1\ \nabla u=0\ ,N=0\,; \qquad (9)$$

$$t=0\ u=-H_1(r,0)\ ,N=-H_2(r,0)\,, \qquad (10)$$

Механика

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial H_1(r,t)}{\partial t},\ \frac{\partial N}{\partial t}=\dot{\Theta}_0-\frac{\partial H_2(r,t)}{\partial t};$$

где $F_2=-\nabla\frac{\partial H_2}{\partial r}+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(a_7H_2+a_8\nabla H_1)$,

$F_1=-\nabla\frac{\partial H_1}{\partial r}+b_1\frac{H_1}{r^2}+b_2\frac{\partial H_2}{\partial r}+b_3\frac{H_2}{r}+\frac{1}{(1+a_4)}\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2}$,

$b_1=\frac{a_1+a_2a_5}{1+a_4},\ b_2=\frac{a_6-1}{1+a_4},\ b_3=b_2+\frac{a_3-a_2a_6}{1+a_4}$.

Здесь следует отметить, что $A(r,t)$ является функцией перемещений цилиндрических поверхностей цилиндра. Первоначально $A(r,t)$ приравнивается к нулю с последующим ее определением и уточнением H_1,F_1,F_2.

Дальнейшие преобразования расчетных соотношений (8)–(10) связаны с использованием следующих допущений: $b_1=1,\ b_3=0$ и введения термоупругого потенциала

$$N=\nabla B. \qquad (11)$$

Условие $b_1=1$ можно принять без большой погрешности, поскольку для пьезокерамических материалов $b_1=0{,}94\div0{,}98$, а зависимость $b_3=0$ выполняется в случае равенства компонент тензора температурных напряжений ($\gamma_{11}=\gamma_{33}$) и отсутствие влияния температуры на электрическое поле ($g_3=0$).

В результате формируется следующая задача относительно $u(r,t),B(r,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla u+b_2\frac{\partial}{\partial r}\nabla B-\frac{1}{(1+a_4)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F_1, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla B-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(a_7B+a_8u)=F_3;$$

$$r=R,1\ \nabla u=\nabla B=0\ ; \qquad (13)$$

$$t=0\ u=-H_1(r,0)\ ,\nabla B=-H_2(r,0), \qquad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial H_1(r,t)}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\nabla B=\dot{\Theta}_0-\frac{\partial H_2(r,t)}{\partial t};$$

где $F_3=-\frac{\partial H_2}{\partial r}+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(a_7H_3+a_8H_1),\nabla H_3=f_5(r)\omega_1(t)+f_6(r)\omega_2(t)$.

Начально-краевую задачу (12)–(14) решаем, используя структурный алгоритм обобщенного конечного интегрального преобразования (КИП) [14]. При этом для данной задачи удается использовать однокомпонентное неизвестное ядро преобразований $K(\lambda_i,r)$:

$$\{G_1(\lambda_i,t),G_2(\lambda_i,t)\}=\int_R^1\{u(r,t),B(r,t)\}K(\lambda_i,r)rdr, \qquad (15)$$

$$\{u(r,t),B(r,t)\}=\sum_{i=1}^{\infty}\{G_1(\lambda_i,t),G_2(\lambda_i,t)\}K(\lambda_i,r)\|K_i\|^{-2}, \qquad (16)$$

$$\|K_i\|^2=\int_R^1 K(\lambda_i,r)^2rdr\ ;$$

где λ_i — собственные значения, образующие счетное множество.

В результате использования алгоритма КИП [14] получаем задачи относительно ядра преобразований $K(\lambda_i,r)$:

$$\frac{d^2K(\lambda_i,r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dK(\lambda_i,r)}{dr}+\left(\lambda_i^2-\frac{1}{r^2}\right)K(\lambda_i,r)=0, \qquad (17)$$

$$r=R,1\ \nabla K(\lambda_i,r)=0, \qquad (18)$$

и трансформант $G_1(\lambda_i,t),G_2(\lambda_i,t)$:

$$-\lambda_i^2G_{1i}+\frac{\lambda_i^2}{(1+a_4)}G_{2i}-\frac{1}{(1+a_4)}\frac{d^2G_{1i}}{dt^2}=F_{1H}\ , \qquad (19)$$

$$-\lambda_i^2 G_{2i} - \left(\frac{d}{dt} + \beta \frac{d^2}{dt^2}\right)\left(a_7 G_{2i} + a_8 G_{1i}\right) = F_{2H} \;;$$

$$t = 0 \;\; G_{1i} = G_{1i0}\,,\; \frac{dG_{1i}}{dt} = \dot{G}_{1i0}\,,\; G_{2i} = G_{2i0}\,,\; \frac{dG_{2i}}{dt} = \dot{G}_{2i0}\,; \tag{20}$$

где $\left\{F_{1H}, F_{2H}\right\} = \int_R^1 \left\{F_1, F_3\right\} K(\lambda_i, r) r dr$, $\left\{G_{1i0}, G_{2i0}\right\} = -\int_R^1 \left\{H_1(r,0), H_2(r,0)\right\} K(\lambda_i, r) r dr$,

$\left\{\dot{G}_{1i0}, \dot{G}_{2i0}\right\} = \int_R^1 \left\{-\frac{\partial H_1(r,t)}{\partial t}_{|t=0}, \left(\dot{\Theta}_0 - \frac{\partial H_1(r,t)}{\partial t}\right)_{|t=0}\right\} K(\lambda_i, r) r dr$.

Общее решение задачи (17), (18) имеет вид:

$$K(\lambda_i, r) = Y_0(\lambda_i) J_1(\lambda_i r) - J_0(\lambda_i) Y_1(\lambda_i r). \tag{21}$$

Здесь собственные значения λ_i определяются с помощью следующего трансцендентного уравнения:

$$Y_0(\lambda_i) J_0(\lambda_i R) - J_0(\lambda_i) Y_0(\lambda_i R) = 0 .$$

Система дифференциальных уравнений (19) приводится к следующему разрешающему уравнению 4-го порядка относительно $G_1(\lambda_i, t)$:

$$\left(\frac{d^4}{dt^4} + b_4 \frac{d^3}{dt^3} + b_{5i} \frac{d^2}{dt^2} + b_{6i} \frac{d}{dt} + b_{7i}\right) G_{1i} = F_H\,, \tag{22}$$

где $F_H = -\frac{\lambda^2}{a_7 \beta}\left[F_{2H} + (1 + a_4) F_{1H}\right] - \frac{(1 + a_4)}{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) F_{1H}$,

$b_4 = \frac{1}{\beta}\,,\; b_{5i} = \lambda_i^2\left(1 + a_4 + \frac{a_8}{a_7} + \frac{1}{a_7\beta}\right),\; b_{6i} = \frac{\lambda_i^2}{\beta}\left(1 + a_4 + \frac{a_8}{a_7}\right),\; b_{7i} = \lambda_i^4 \frac{(1 + a_4)}{a_7 \beta}$.

Поскольку характеристическое уравнение, соответствующее (22),

$$k^4 + b_4 k^3 + b_{5i} k^2 + b_{6i} k + b_{7i} = 0\,,$$

будет действительное, то оно из условия осциллирующего решения для $G_1(\lambda_i, t)$ имеет два действительных корня (k_{1i}, k_{2i}) и два комплексно сопряженных корня

$$(k_{3i} = \sigma + i\omega,\; k_{4i} = \sigma - i\omega).$$

В этом случае общее решение уравнения (22) имеет вид:

$$G_1(\lambda_i, t) = D_{2i} \exp(k_{1i} t) + D_{3i} \exp(k_{2i} t) + D_{4i} \exp(k_{3i} t) + D_{5i} \exp(k_{4i} t) + \tag{23}$$

$$+ b_{8i} \int_0^t F_H(\tau)\left\{\exp\left[k_{1i}(t-\tau)\right] - \exp\left[k_{2i}(t-\tau)\right]\right\} d\tau + b_{9i} \int_0^t F_H(\tau) \exp\left[\sigma(t-\tau)\right]\left\{b_{10i} \sin(\omega t - \omega\tau) - b_{11i} \cos(\omega t + \omega\tau)\right\} d\tau\,,$$

где $b_{8i} = \left\{(k_{1i} - k_{2i})\left[(k_{1i} - \sigma)^2 + \omega^2\right]\right\}^{-1}$, $b_{9i} = \left[\omega\left(b_{10i}^2 + b_{11i}^2\right)\right]^{-1}$, $\sigma = \frac{k_{3i} + k_{4i}}{2}$, $b_{10i} = k_{1i} k_{2i} - (k_{1i} + k_{2i})\sigma + \sigma^2 - \omega^2$,

$b_{11i} = \omega(2\sigma - k_{1i} - k_{2i})$, $\omega = \left|\frac{k_{3i} - k_{4i}}{2i}\right|$.

Функция $G_2(\lambda_i, t)$ определяется из первого уравнения системы (19). Подстановка полученных выражений для трансформант в граничные условия (20) позволяет определить постоянные интегрирования $D_{2i} ... D_{5i}$.

Подстановка $G_1(\lambda_i, t)$, $G_2(\lambda_i, t)$ в (16), (11), (6) позволяет получить окончательные выражения для функций $U(r,t)$, $\Theta(r,t)$:

$$U(r,t) = H_1(r,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_1(\lambda_i, t) K(\lambda_i, r) \left\|K_i\right\|^{-2}, \tag{24}$$

$$\Theta(r,t) = H_2(r,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_2(\lambda_i, t) \nabla K(\lambda_i, r) \left\|K_i\right\|^{-2}.$$

На заключительном этапе исследования функции $H_1(r,t), H_2(r,t)$ определяются при решении следующих дифференциальных уравнений:

$$\nabla\frac{\partial H_1}{\partial r}-b_1\frac{H_1}{r^2}-b_2\frac{\partial H_2}{\partial r}-b_3\frac{H_2}{r}=0\,,\nabla\frac{\partial H_2}{\partial r}=0\,, \tag{25}$$

что позволяет существенно упростить правые части (F_1,F_2) расчетных соотношений (8).

Подстановка выражений для H_1,H_2 в (25) позволяет сформировать системы уравнений относительно функций $f_1(r)...f_6(r)$, которые определяются при удовлетворении условий (7).

Потенциал электрического поля пьезокерамического цилиндра определяется в результате интегрирования равенства (5) и удовлетворение предпоследнего граничного условия (2):

$$\phi=\int\left[a_4\frac{\partial H_1(r,t)}{\partial r}+a_5\frac{H_1(r,t)}{r}+a_6H_2(r,t)\right]dr+ \tag{26}$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}G_1(\lambda_i,t)B_1(\lambda_i)\|K_i\|^{-2}+a_6\sum_{i=1}^{\infty}G_2(\lambda_i,t)B_2(\lambda_i)\|K_i\|^{-2}+D_6(t)$$

где $D_6(t)=-\left[\int\left[a_4\frac{\partial H_1(r,t)}{\partial r}+a_5\frac{H_1(r,t)}{r}+a_6H_2(r,t)\right]dr+\sum_{i=1}^{\infty}G_1(\lambda_i,t)B_1(\lambda_i)\|K_i\|^{-2}+\right.$

$\left.+a_6\sum_{i=1}^{\infty}G_2(\lambda_i,t)B_2(\lambda_i)\|K_i\|^{-2}\right]_{|r=R}$, $B_1(\lambda_i)=\int\left[a_4\frac{\partial K(\lambda_i,r)}{\partial r}+a_5\frac{K(\lambda_i,r)}{r}\right]dr$,

$B_2(\lambda_i)=\int\nabla K(\lambda_i,r)dr$.

Полученные расчетные соотношений (24), (26) удовлетворяют дифференциальные уравнения (1) и краевые условия (2), (3), т.е. являются замкнутым решением рассматриваемой задачи.

Результаты исследования. В качестве примера рассматривается радиально поляризованный пьезокерамический цилиндр ($b=0{,}02$ м, $R=0{,}8$) состава PZT–4, имеющего следующие физические характеристики [10]: $\rho=7500$ кг/м^3,

$\{C_{11},C_{33},C_{13}\}=\{13{,}9;\ 11{,}5;\ 7{,}43\}\times10^{10}$ Н/м^2, $\{e_{31},e_{33}\}=\{-5{,}2;\ 15{,}1\}$ Кл/м^2,

$\{\gamma_{11},\gamma_{33}\}=\{4{,}6;\ 3{,}9\}\times10^5$ Н/(м^2 $^{\circ}$C), $\varepsilon_{33}=5{,}62\times10^{-9}$ Ф/м, $g_3=2\times10^{-4}$ Кл/(м^2 $^{\circ}$C),

$k=3\times10^6$ Дж/(м^3 $^{\circ}$C), $\Lambda=1{,}6$ Вт/(м $^{\circ}$C), $\beta_{rel}=5\times10^{-5}$ с.

На внутренней поверхности ($r_*=a$) пьезокерамического цилиндра действует температурная нагрузка:

$$\omega_1^*(t_*)=T_{\max}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2t^*_{\max}}t_*\right)H\left(t^*_{\max}-t_*\right)+H\left(t_*-t^*_{\max}\right)\right],\omega_2^*(t_*)=0\,,$$

где $H(\tilde t)$— единичная функция Хэвисайда ($H(\tilde t)=1$ при $\tilde t\ge0$, $H(\tilde t)=0$ при $\tilde t<0$), $T_{\max}=T^*_{\max}-T_0$, $T^*_{\max},t^*_{\max}$ — максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ($T^*_{\max}=373\ K\ (100\ ^{\circ}\mathrm{C})$, $T_0=293\ K$ ($20\ ^{\circ}$C), $t^*_{\max}=1$ с).

На рис. 1 представлены графики изменения функций $\Theta^*(r,t)$, $U(r,t)$, $\phi(r,t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени t. Цифрами 1–3 соответственно обозначены результаты, полученные при следующих значениях времени: $t=t_{\max},4t_{\max},15t_{\max}$ ($t_{\max}=\frac{\Lambda_*}{kb^2}t^*_{\max}$).

Анализ результатов расчета позволяет сделать следующие выводы:

– достаточно большая величина коэффициента линейного температурного расширения α_t пьезокерамического материала приводит к быстрому прогреву цилиндра;

– радиальные перемещения на внутренней цилиндрической поверхности ($r=R$) на первом этапе исследования ($t=t_{\max}$) принимают наибольшие значения с последующим уменьшением в течение времени. Обратная картина наблюдается относительно перемещений при $r=1$;

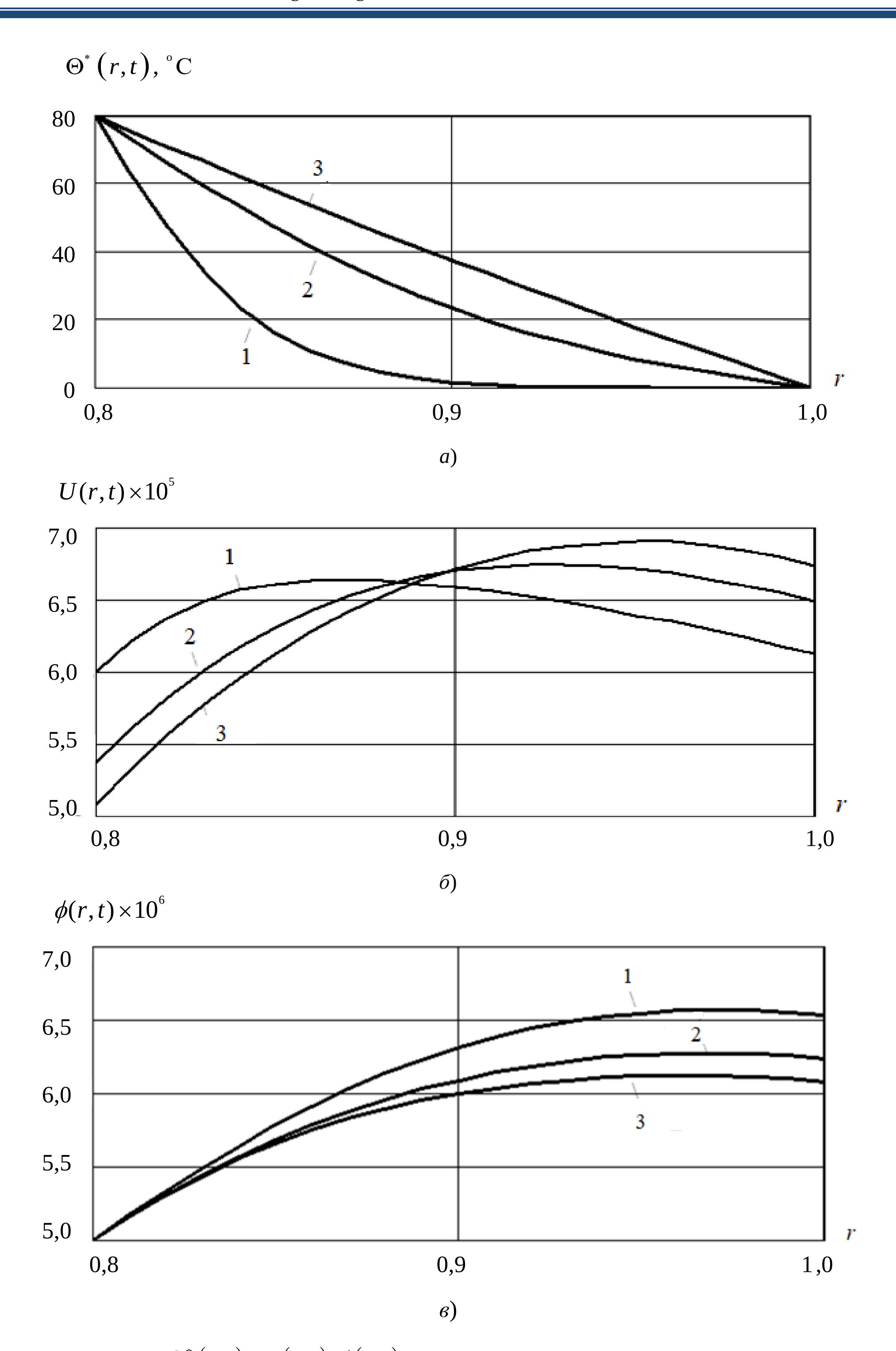


Рис. 1. Графики изменения $\Theta^*(r,t)$, $U(r,t)$, $\phi(r,t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени t ($1-t_{\max}, 2-4t_{\max}, 3-15t_{\max}$): а — $\Theta^*(r,t)\div r$; б — $U(r,t)\div r$; в — $\phi(r,t)\div r$

Степень связанности термоэлектроупругих полей наиболее удобно проанализировать с помощью коэффициента $b_{6i}=\dfrac{\lambda^2}{\beta}\left(1+a_4+\dfrac{a_8}{a_7}\right)$ равенства (21). Здесь a_4 определяет связанность электроупругих полей, а $\dfrac{a_8}{a_7}$ — влияние скорости изменения объема тела на его температурное поле.

На рис. 2 представлен график изменения перемещений $U(1,\ t)$ по времени t с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) наведенного электрического поля.

Следует отметить, что предварительная поляризация пьезокерамики приводит к образованию более «жесткого» материала ($a_4 = 0,353$) и соответственно к уменьшению перемещений при деформировании цилиндра.

Связанностью температурного и электроупругого полей в пьезокерамическом цилиндре можно пренебречь за счет малого значения

$$\frac{a_8}{a_7} = 1,8 \times 10^{-4} \ll 1 .$$

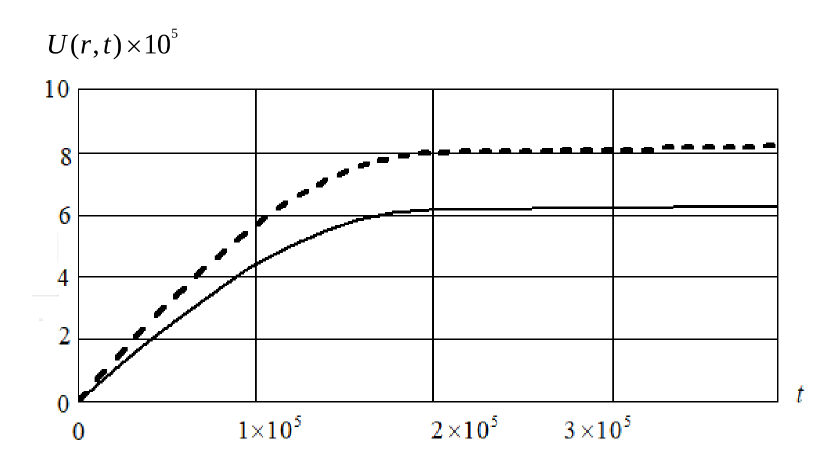


Рис. 2. График изменения $U(1,\ t)$ по времени t

(сплошная линия — с учетом поляризации, пунктирная — без учета электрического поля)

На рис. 3 показаны графики изменения электрического напряжения $V(t)$ по времени с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия, $\beta_{rel} = 0$) релаксации теплового потока.

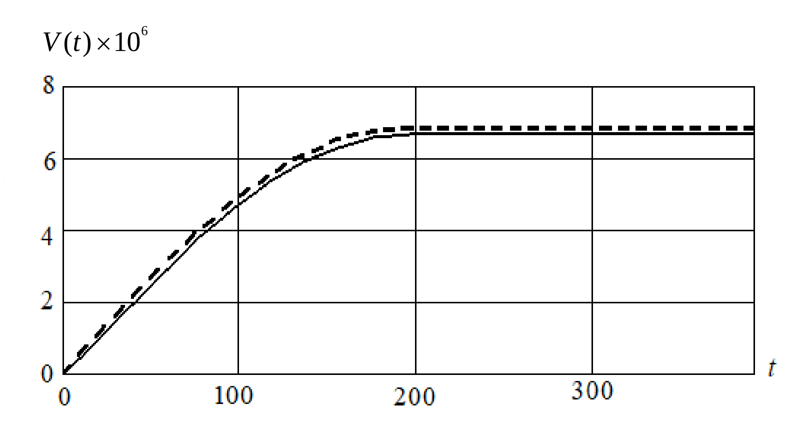


Рис. 3. График изменения $V(t)$ по времени t ($t^*_{\max} = 0,001\ c$, $t_{\max} = 196$)

Результаты расчета показывают, что для рассматриваемой задачи уточненную гиперболическую теорию Лорда-Шульмана необходимо использовать при большой скорости изменения температурной нагрузки ($t^*_{\max} \ge 0,001$ с, $\left.\frac{d\omega_1^*(t_*)}{dt_*}\right|_{t=0} \ge 5,56 \times 10^5\ K/c$), а при меньших скоростях — классическую теорию термоэлектроупругости ($\beta_{rel} = 0$).

Обсуждение и заключения. Построенное новое замкнутое решение связанной динамической задачи при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1-го рода позволяет определить все компоненты термоэлектроупругих полей в длинном пьезокерамическом цилиндре. Преимущество представленного алгоритма расчета заключается в том, что в отличие от несвязанной постановки задачи, отпадает необходимость аппроксимации функции температуры при исследовании уравнения движения. При этом действительно влиянием скорости изменения объема пьезокерамического тела на его температурное поле можно пренебречь.

Список литературы

1. Кульчин, Ю. Н. Распределенные волоконно-оптические измерительные системы / Ю. Н. Кульчин. — Москва : Физматгиз, 2001. — 272 с.

2. Lord, H. W. A generalized dynamical theory of thermoelasticity / H. W. Lord, Y. Shulman // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1967. — Vol. 15. — P. 299–309. https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5

3. Green, A. E. Thermoelasticity without energy dissipation / A. E. Green, P. M. Naghdi // Journal of Elasticity. — 1993. — Vol. 31. — P. 189–208. https://doi.org/10.1007/BF00044969

4. Montanaro, A. Some theorems of incremental thermoelectroelasticity / A. Montanaro // Archives of Mechanics. — 2010. — Vol. 62. — P. 49–72.

5. Kulikov, G. M. Coupled thermoelectroelastic stress analysis of piezoelectric shells / G. M. Kulikov, A. A. Mamontov, S. V. Plotnikova // Composite Structures. — 2015. — Vol. 124. — P. 65–76. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.12.045

6. Abbas, I. A. LS model on electro-magneto-thermoelastic response of an infinite functionally graded cylinder / I. A. Abbas, A. M. Zenkour // Composite Structures. — 2013. — Vol. 96. — P. 89–96. https://doi.org/10.1016/j.-compstruct.2012.08.046

7. Ватульян, А. О. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектроупругости / А. О. Ватульян, А. Ю. Кирютенко, А. В. Наседкин // Прикладная механика и техническая физика. — 1996. — Т. 37, № 5 (219). — С. 135–142.

8.Ватульян, А. О. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Вычислительная механика сплошных сред. — 2017. — Т. 10, № 2. — С. 117–126. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10

9. Saadatfar, M. Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient / M. Saadatfar, A. S. Razavi // Journal of Mechanical Science and Technology. — 2009. — Vol. 23. — P. 45–53. https://doi.org/10.1007/s12206-008-1002-8

10. Khorsand, M. Dynamic analysis of a functionally graded piezoelectric spherical shell under mechanical and thermal shocks / M. Khorsand // Mechanical Engineering Science. — 2014. — Vol. 228. — P. 632–645. https://doi.org/10.1177/0954406213489445

11. Thermoelectroelastic response of a piezoelectric cylinder with D symmetry under axisymmetric mechanical and thermal loading/ M. Ishihara, Y. Ootao, Y. Kameo, T. Saito // Mechanical Engineering Journal. — 2017. — Vol. 4. — P. 16–00609. https://doi.org/10.1299/mej.16-00609

12. Shlyakhin, D. A. Uncoupled problem of thermoelectroelasticity for a cylindrical shell / D. A. Shlyakhin, M. A. Kalmova // In: Proc. XXX Russian-Polish-Slovak Seminar Theoretical Foundation of Civil Engineering (RSP 2021). — 2022. — Vol. 189. — P. 263–271. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86001-1_31

13. Шляхин, Д. А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра / Д. А. Шляхин, М. А. Кальмова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. — 2021. — № 2. — С. 181–190. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.16

14. Сеницкий, Ю. Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики / Ю. Э. Сеницкий // Известия вузов. Математика. — 1991. — № 4. — С. 57–63.

15. Гринченко, В. Т. Механика связанных полей в элементах конструкций / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. — Киев : Наукова думка, 1989. — 279 с.

Поступила в редакцию 10.04.2022
Поступила после рецензирования 12.05.2022
Принята к публикации 12.05.2022

Об авторах:

Шляхин Дмитрий Аверкиевич, заведующий кафедрой «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты» Самарского государственного технического университета (443100, РФ, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194), доктор технических наук, доцент, ResearcherID, ORCID, d-612-mit2009@yandex.ru

Кальмова Мария Александровна, старший преподаватель кафедры «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты» Самарского государственного технического университета (443100, РФ, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194), ResearcherID, ORCID, kalmova@inbox.ru

Заявленный вклад соавторов:

Д. А. Шляхин — научное руководство, формирование основной концепции, цели и задачи исследования, проведение расчетов, формирование выводов; М. А. Кальмова — подготовка текста, анализ результатов исследований, доработка текста, корректировка выводов.

Конфликт интересов.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.